



Proyectos de ampliación formativa en la asignatura Métodos Numéricos

Extension projects for the Numerical Methods course



AUTORES

Manuel Villanueva Pesqueira¹

mvillanueva@comillas.edu  <https://orcid.org/0000-0003-2869-334X>

Emanuel Gastón Mompó Pavesi¹

egmomp@comillas.edu  <https://orcid.org/0000-0002-3958-6278>

Arturo Martín Colino²

201908502@alu.comillas.edu

Patricia Renart Carnicero²

202103422@alu.comillas.edu

Almudena Garrido García-Pita²

202204789@alu.comillas.edu

¹ Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Pontificia Comillas.

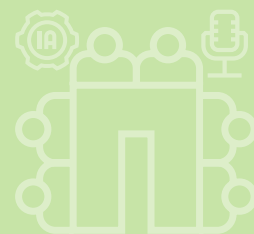
² Alumno colaborador del Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Pontificia Comillas.



PALABRAS CLAVE | KEYWORDS

Métodos Numéricos; modelización matemática; simulación numérica; aprendizaje basado en proyectos; aprendizaje activo

Numerical Methods; Mathematical Modeling; Numerical Simulations; Project-Based Learning; Active Learning

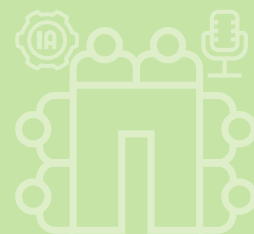


RESUMEN

Se aborda la implementación del Aprendizaje Basado en Proyectos y el Aprendizaje Activo en la asignatura de Métodos Numéricos del Grado en Ingeniería Matemática e Inteligencia Artificial en la Universidad Pontificia Comillas – ICAI. Siguiendo el enfoque práctico de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería, esta metodología fomenta el desarrollo de una amplia gama de habilidades en los estudiantes, combinando teoría y práctica mediante proyectos grupales. Los métodos numéricos son esenciales para una amplia variedad de aplicaciones modernas, lo que se refleja en la oferta de proyectos que abarcan desde la compresión de imágenes hasta la modelización de fenómenos colectivos. Los objetivos de esta acción incluyen promover el pensamiento crítico, visibilizar la matemática aplicada y fomentar tanto el trabajo grupal como individual. La evaluación se estructura en informes, presentaciones y defensas, buscando garantizar la implicación individual y el interés por temáticas diversas. Los resultados iniciales indican que esta metodología no solo fortalece los conocimientos matemáticos y científicos de los estudiantes, sino que también fomenta su pensamiento crítico y enfoque científico, añadiendo valor a su formación integral. A futuro, se planea ampliar la variedad de proyectos para cubrir un mayor rango de intereses del alumnado.

ABSTRACT

In this work, we discuss the implementation of Project-Based Learning and Active Learning in the Numerical Methods course of the Bachelor's Degree in Mathematical Engineering and Artificial Intelligence at Universidad Pontificia Comillas – ICAI. These methodologies suit the practical (or hands on) approach of the Escuela Técnica Superior de Ingeniería, as they promote the development of a wide range of skills in students by combining both theory and practice through group projects. Numerical methods are essential for a wide variety of modern applications, and this is reflected in the project offerings, ranging from image compression to the modeling of collective phenomena. The objectives of this initiative include promoting critical thinking, giving applied mathematics more visibility, and encouraging both group and individual work. Assessment is structured through reports, presentations, and defenses, aiming to ensure individual involvement and interest in diverse topics. Initial results indicate that these methodologies not only strengthen students' mathematical and scientific knowledge but also foster their critical thinking and scientific vision, adding value to their overall education. In the future, we plan to expand the variety of projects to cover a broader range of student interests.



1. INTRODUCCIÓN

Los futuros egresados del Grado en Ingeniería Matemática e Inteligencia Artificial (iMAT) deben aunar una amplia variedad de aptitudes y destrezas. Entre ellas, destacamos la capacidad de utilizar con criterio las distintas herramientas matemáticas estudiadas a lo largo de la titulación para resolver problemas prácticos.

Un rasgo distintivo del ICAI es la importancia que se brinda a la práctica en la formación de su alumnado. En el Grado en iMAT esto se ve plasmado a través del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). Concretamente, las distintas asignaturas de los primeros cursos incluyen la realización de proyectos individuales o grupales.

Los métodos numéricos tienen una gran importancia en el mundo actual dada su ubicuidad en ciencia e ingeniería. Éstos son utilizados en el tratamiento de datos (por ejemplo, al ordenar y valorar la importancia de los resultados presentados por un buscador como Google), logística de distribución y transporte (por ejemplo, al optimizar trayectos de reparto de mercancías), simulaciones numéricas (por ejemplo, estudio de la aerodinámica de aviones usando gemelos digitales, para acotar la experimentación en túnel de viento –mucho más cara), o el tratamiento de señales (por ejemplo, compresión de datos o la reconstrucción de imágenes –un hito reciente ha sido la obtención de la primera fotografía de un agujero negro), entre otras muchas aplicaciones.

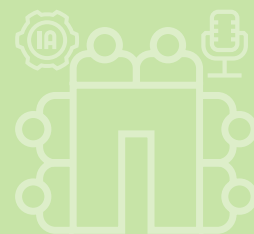
Los ejemplos de aplicaciones previamente mencionados permiten atisbar la amplitud de conocimientos que se debe abordar en una asignatura como Métodos Numéricos. Frente a este hecho, sin embargo, se encuentra una restricción natural: el tiempo disponible. No es posible abarcarlo todo. Al menos, no es posible si se intenta profundizar en cada temática.

Por otra parte, el perfil del alumnado del Grado en iMAT se caracteriza por la diversidad de intereses. En aras de la claridad, se podría afirmar que algunos estudiantes tienen como principal interés las matemáticas, mientras que otros se centran en la informática y sus posibles aplicaciones. Esto supone una dificultad añadida a la hora de diseñar proyectos que sean atractivos para ambos grupos de intereses. Es decir, profundizar en algunos temas específicos puede atraer a unos, pero ir en detrimento del interés de los otros.

No obstante, la asignatura de Métodos Numéricos encaja perfectamente entre las vertientes matemática e informática, al combinar herramientas teóricas con aplicaciones prácticas en ambas áreas. A través del ABP y fomentando el Aprendizaje Activo (AA) es posible cubrir un temario suficientemente amplio y dar pie a la especialización en temas concretos respondiendo a los intereses particulares de los alumnos.

1.1. Objetivos

El diseño de las prácticas grupales busca responder a una gran variedad de temáticas y, a su vez, cumplir una serie de requisitos de interés común y transversal, importantes para futuros ingenieros o científicos.



Los objetivos que nos hemos establecido han sido los siguientes:

- **(O1)** Diseñar una amplia y variada oferta de trabajos.
- **(O2)** Buscar un equilibrio entre ser accesibles y conllevar cierto reto para los alumnos.
- **(O3)** Promover la cultura científica y matemática general.
- **(O4)** Fomentar el pensamiento científico y matemático.
- **(O5)** Visibilizar la matemática aplicada en el contexto actual.
- **(O6)** Promover tanto el trabajo grupal como individual.
- **(O7)** Elaborar un sistema de evaluación que tenga en cuenta aspectos intragrupales e intergrupales.
- **(O8)** Establecer vías de valoración y reevaluación de las propias propuestas de trabajo.

2. METODOLOGÍA

Vamos a distinguir cuatro bloques diferenciados para la metodología. El primero consiste en la búsqueda de ideas para los proyectos, el segundo es la propia preparación de las propuestas para el alumnado, el tercero está centrado en la evaluación del trabajo realizado por los alumnos, y el cuarto consiste en los métodos de valoración y revisión de las propias propuestas de trabajo.

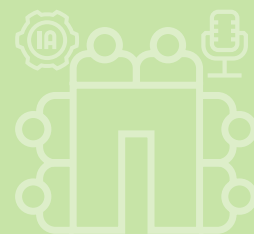
2.1. Fuentes de contenido

De cara a afrontar los objetivos O1, O2 y O3 nos hemos inspirado en la obra de autores con gran predilección a la divulgación de temáticas técnicas y de actualidad (o de técnicas clásicas pero de gran relevancia actualmente), como puede ser el caso de (Trefethen, Birkisson, & Driscoll, Exploring ODEs, 2017), (Trefethen & Bau, Numerical linear algebra, 2022), (Van Kampen, 1992), (Shizgal, 2015), (Bender & Orszag, 2013) o (Weinan, Li, & Vanden-Eijnden, 2021).

Adicionalmente, hemos usado como fuente de inspiración a divulgadores de ciencia como los creadores de los canales de YouTube Veritasium, 3Blue1Brown, Kurzgesagt, Numberphile, o QuantumFracture.

Este tipo de autores o divulgadores son una vasta fuente de ejemplos de uso que, generalmente, tienen una dificultad teórica o técnica muy al alcance de estudiantes universitarios.

Por otra parte, existe un ámbito de investigación muy propenso a brindar buenas ideas para cumplir estos objetivos, que es el estudio de los sistemas complejos, fuertemente vinculado a la física estadística. Las técnicas de esta área son utilizadas en campos como neurociencia, dinámica de poblaciones, o estudio del



tráfico, entre muchos otros. En este caso, las fuentes, al ser trabajos de investigación, tienen una dificultad técnica mayor. No obstante, simplificando los casos de estudio es posible obtener cuestiones accesibles.

2.2. Preparación de las propuestas

A la hora de diseñar las propuestas de trabajo, con el fin de concretar los objetivos O4, O5 y O6, hemos establecido una serie de requisitos o pautas a seguir. Concretamente, al preparar las propuestas de trabajo, estos:

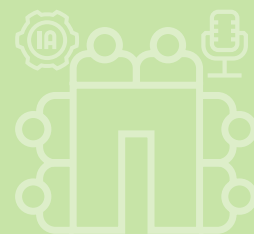
- **(R1)** Deben guiar o dar pautas a los alumnos sobre cómo obtener los conocimientos necesarios.
- **(R2)** Deben reforzar los conocimientos generales o fundamentales de matemáticas.
- **(R3)** Deben llevar asociadas (de forma justificada) aplicaciones modernas de la matemática.
- **(R4)** Deben involucrar la modelización matemática.
- **(R5)** Deben formar explícitamente el pensamiento crítico.
- **(R6)** Deben requerir la programación de métodos numéricos y, a ser posible, simulaciones numéricas.
- **(R7)** Deben incluir experimentación (asistida por ordenador).
- **(R8)** Deben dar pie a trabajo tanto individual como grupal.

El requisito R1 se puede lograr incluyendo una explicación funcional u operativa de los conceptos matemáticos involucrados. A ser posible, se establecen vínculos con conceptos trabajados en asignaturas previas (por ejemplo, Ecuaciones Diferenciales en el caso del estudio de sistemas dinámicos) o concurrentes en tiempo (por ejemplo, Aprendizaje Automático en el caso del análisis de componentes principales).

El requisito R2 puede lograrse o bien a través de ejercicios teóricos o bien por su aplicación a problemas reales. Es decir, mediante la puesta en práctica por parte del propio estudiante.

Los requisitos R3 y R4 los logramos con un enfoque positivista. Es decir, se motivan los conceptos por su utilidad práctica. Por ejemplo, el cálculo de valores y vectores propios de una matriz debe ir acompañado por una aplicación, como la compresión de imágenes mediante la descomposición en valores singulares. Como parte de esto, hay que modelizar o brindar un significado exógeno a los conceptos matemáticos.

El requisito R5 es el que más cuidado requiere. Las herramientas matemáticas tienen unas condiciones de uso y unas limitaciones. Los problemas reales raramente se someten a esas condiciones y, para poder ser operativos, deben hacerse simplificaciones de la realidad. A medida que se presentan herramientas o modelos matemáticos, así como las asunciones simplificadoras que se van realizan-



do, a los alumnos se les planteará en forma de ejercicio revisar los límites de las herramientas y poner en tela de juicio las propias simplificaciones. Además, también deberán valorar los propios resultados. En este sentido, nos hemos inspirado en trabajos como (Lepage, 2021) o (Mompó, 2022).

Los requisitos R6 y R7 normalmente estarán vinculados a los requisitos R3 y R5. De forma natural para la asignatura, los estudiantes deben programar los métodos numéricos pertinentes, pero además aplicarlos a problemas que no sean meramente académicos. En particular, se pueden plantear ejercicios exploratorios (experimentación numérica).

El último requisito, R8, se puede lograr de forma natural distinguiendo distintos casos de uso para las herramientas, o separando el estudio de las propiedades y características teóricas de una herramienta frente a las de sus implementaciones en ordenador.

2.3. Evaluación del trabajo de los grupos

El diseño de este tipo de prácticas, grupales y especializadas, puede tener algunas deficiencias innatas. Por un lado, el trabajo grupal puede conllevar una desigualdad (tanto objetiva como subjetiva) de la carga de trabajo (Hall & Buzwell, 2013). Por el otro, que cada grupo profundice en un tema particular puede llevar a sólo se interese por su temática y no reciba información, siquiera superficial, de las otras propuestas o temáticas. Esto mismo puede ocurrir dentro de un mismo grupo debido al reparto de tareas. Mediante el objetivo O7 buscamos reducir estas deficiencias.

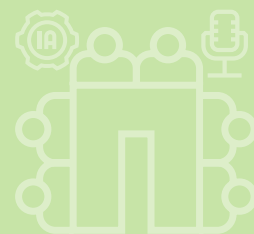
La desigualdad de la carga de trabajo, por los rasgos y aptitudes propias de cada uno de los miembros de un grupo, quizá sea una cuestión inabordable. Sin embargo, es posible garantizar un grado mínimo de implicación por parte de los participantes (tanto sobre sus tareas propias como en los objetivos generales del trabajo) mediante un sistema de evaluación que mezcle aspectos globales como particulares (Swaray, 2012).

Concretamente, la evaluación del trabajo realizado contemplará tres tareas:

- ➔ Realización de una memoria del trabajo llevado a cabo.
- ➔ Presentación en público del trabajo realizado ante la clase.
- ➔ Defensa pública del trabajo realizado ante un grupo de profesores de la asignatura.

Para poder forzar la implicación individual, tanto en la presentación como en la defensa de su trabajo se tiene en cuenta la participación de todos los miembros del grupo. Los alumnos son conocedores de este aspecto desde el momento en que se plantea la realización de los trabajos grupales.

Por otra parte, para evitar que los grupos sólo se interesen por su temática, es posible incluir alguna pregunta en los exámenes de la asignatura. Estas preguntas, aunque tematizadas, deben ser suficientemente generales como para ser



abordadas estrictamente con los conocimientos del currículum de la asignatura. Además, deben tener una puntuación limitada. Un formato de pregunta muy propicio a esto es el tipo test, pidiendo escoger la afirmación verdadera (o falsa) entre varias opciones.

2.4. Evaluación de las propias propuestas

Para obtener retroalimentación sobre las propias propuestas y así poder modificarlas, persiguiendo el objetivo O8, disponemos de dos fuentes de información. La primera son encuestas de satisfacción realizadas poco tiempo después de la presentación y defensa de los trabajos. La segunda es la información, más abierta, que puedan brindar los alumnos colaboradores, puesto que se procura que sean alumnos que hayan superado la asignatura el curso académico inmediatamente anterior.

Las encuestas sirven para recoger información de la valoración del estudiantado sobre cuánto les ha permitido su proyecto profundizar en sus conocimientos matemáticos, poner en práctica estos conocimientos, o si les ha servido para fomentar un cierto enfoque científico. Además, se les consulta sobre sus fuentes de información, tutorías con profesores, y se distingue entre tutorías para resolver dudas de tutorías para discutir resultados. Por último, también se les consulta sobre su percepción de cuán integradas están las temáticas trabajadas en el Grado en iMAT así como el dimensionamiento de los trabajos (puesto que hay que tener en cuenta que en otras asignaturas también están realizando trabajos).

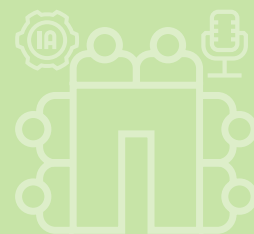
3. RESULTADOS

Vamos a distinguir los resultados de esta acción de innovación docente entre los resultados de la preparación de propuestas y los resultados de evaluación.

3.1. Propuestas elaboradas

Las propuestas desarrolladas hasta el momento han cubierto temáticas modernas como el tratamiento de imágenes (compresión de imágenes así como superresolución (Burger & Burge, 2009)), el análisis de señales (estudio, filtrado y clasificación de señales de audio), estudio de adecuación de distintos métodos numéricos (como la estabilidad de ciertos esquemas de integración al ser aplicados a sistemas hamiltonianos con simetrías (Chen, 2022)), o la modelización y análisis de fenómenos colectivos (como el origen de los atascos de tráfico de vehículos rodados (Helbing, 2001), o la valoración de la viabilidad de conspiraciones a gran escala (Grimes, 2016)).

Según la naturaleza del proyecto, se han planteado como trabajos abiertos o trabajos guiados, siempre buscando una aplicación en la industria o en la investigación. Las propuestas abiertas permiten una mayor personalización y libertad de



trabajo. Un ejemplo de estas propuestas ha sido la de análisis de señales, donde un grupo creó una herramienta que, en tiempo real, intenta distinguir si una voz proviene de un hombre o una mujer; otro grupo, más interesado en la música, se centró en el procesado digital de audio. Los trabajos guiados, por su parte, buscan que los alumnos sigan el hilo de pensamiento de los investigadores al desarrollar su trabajo, adquiriendo, de este modo, experiencia práctica en los métodos de la ciencia y el pensamiento crítico. Algunos de estos trabajos, como el del estudio de los atascos de tráfico, dio pie a discusiones sobre la idoneidad del modelo matemático tras la realización de experimentos numéricos por parte de los alumnos, dado que observaban fenómenos no físicos en algunos casos límite.

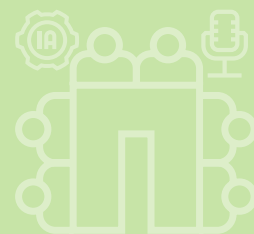
3.2. Resultados de evaluación

Los resultados obtenidos hasta el momento (tras dos cursos académicos de implantación) han sido positivos.

Por una parte, la valoración del profesorado respecto a los informes realizados por los grupos, sus presentaciones y sus defensas del trabajo realizado ha sido satisfactoria. De forma más detallada, el producto final del trabajo grupal ha sido excelente (los grupos que desarrollaron trabajos más guiados procuraron ser exhaustivos, mientras que los que desarrollaron trabajos más abiertos procuraron ser originales y destacar de alguna manera). Las presentaciones, salvo alguna excepción, fueron elaboradas y, hasta el momento, han participado todos los miembros de cada grupo. Las defensas, por su parte, son generalmente satisfactorias: los participantes más implicados han sido capaces de responder adecuadamente cuando se les pide algún detalle más fino sobre el trabajo realizado, mientras que los menos implicados han tenido más dificultades, pero, aún con todo, han logrado formular una respuesta coherente.

Por otra parte, la valoración brindada por los propios alumnos, aun teniendo en cuenta la naturaleza diversa de cada proyecto, coincide en que los trabajos propuestos han servido para: profundizar sus conocimientos de matemáticas, ponerlos en práctica, fomentar su pensamiento crítico y enfoque científico. Además, consideran que la realización de estos proyectos aporta un valor añadido a su formación, y que están bien integrados en la temática del Grado en iMAT.

Adicionalmente, los estudiantes han tenido que consultar fuentes de información de muchos tipos (profesores, libros o artículos científicos, apuntes de otras asignaturas de la carrera, páginas web y canales de YouTube de divulgación científica y matemáticas), algunas facilitadas por los profesores y otras obtenidas por cuenta propia. Cabe destacar que no sólo se ha acudido a profesores para la realización de consultas, sino también para la discusión de resultados y su interpretación.



4. DISCUSIÓN

Consideramos que los resultados vistos hasta el momento validan esta acción de innovación educativa basada en el ABP y el AA. Algunas deficiencias se irán refinando por aproximaciones sucesivas, curso a curso, como puede ser la extensión de alguna de las propuestas guiadas, o las formas de que los distintos grupos se interesen por el trabajo de los otros y obtengan, al menos, unas nociones superficiales del resto de temáticas. Otras deficiencias posiblemente sean inexpugnables, como la existencia puntual de miembros menos implicados en el trabajo grupal.

De cara al futuro será necesario ampliar las propuestas de trabajo contemplando usos actuales, como técnicas de eliminación de ruido en imágenes, aplicaciones a neurociencia, o técnicas de elementos finitos y aplicaciones en ingeniería.

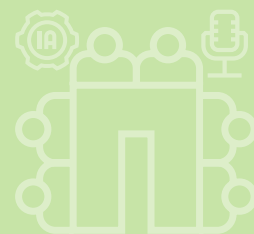
Adicionalmente, se pretende acompañar cada propuesta con un vídeo de corta duración para presentarla, con el objetivo de facilitar la elección de temática y reducir el tiempo de clase dedicado a presentar las temáticas a los alumnos.

5. CONCLUSIONES

El ABP puede brindar herramientas formativas especialmente interesantes en estudios como el Grado en iMAT, cuyos futuros graduados deben tener no sólo una formación técnica apropiada, sino también desarrollar su pensamiento crítico para una puesta en práctica razonable de esa formación, siendo esto último cimentado en el AA. Asignaturas como Métodos Numéricos, dada su transversalidad, constituyen una plataforma idónea para lograrlo pues se puede atender, al mismo tiempo, el refuerzo de conocimientos abordados en la práctica docente, los intereses propios de los alumnos, y la contextualización de estos conocimientos en el mundo actual.

REFERENCIAS

- Bender, C. M., & Orszag, S. A. (2013). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Science & Business Media.
- Burger, W., & Burge, M. J. (2009). *Principles of digital image processing*. Springer.
- Chen, J. (16 de agosto de 2022). *Jupiter Ejected: Numerical Dynamics in Simulations of the Outer Solar System*. Obtenido de SIAM: <https://www.siam.org/publications/siam-news/articles/jupiter-ejected-numerical-dynamics-in-simulations-of-the-outer-solar-system>
- Grimes, D. R. (2016). On the viability of conspiratorial beliefs. *PloS one*, e0147905.



- Hall, D., & Buzwell, S. (2013). The problem of free-riding in group projects: Looking beyond social loafing as reason for non-contribution. *Active Learning in Higher Education*, 37-49.
- Helbing, D. (2001). Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of modern physics*, 1067.
- Lepage, G. P. (2021). Active learning in a graduate quantum field theory course. *American Journal of Physics*, 89(3), 317-323.
- Mompó, E. (Febrero de 2022). Desinformación en la era digital: una oportunidad para la educación matemática. [Trabajo Fin de Máster, UNED]. Obtenido de https://egmompogithub.io/assets/pdf/tfm_uned.pdf
- Shizgal, B. (2015). *Spectral methods in chemistry and physics*. Springer.
- Swaray, R. (2012). An evaluation of a group project designed to reduce free-riding and promote active learning. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 285-292.
- Trefethen, L. N., & Bau, D. (2022). *Numerical linear algebra*. SIAM.
- Trefethen, L. N., Birkisson, Á., & Driscoll, T. A. (2017). *Exploring ODEs*. SIAM.
- Van Kampen, N. G. (1992). *Stochastic processes in physics and chemistry*. Elsevier.
- Weinan, E., Li, T., & Vanden-Eijnden, E. (2021). *Applied stochastic analysis*. American Mathematical Soc.